Distribuição Gumbel

Álaze Gabriel do Breviário
Especialista em Finanças e Controladoria - USP, Especialista em Gestão Financeira - UNINTER, Especialista em Docência e Pesquisa para o Ensino Superior, Especialista em Finanças e Controladoria
Instituição: Universidade de São Paulo - USP
Endereço: Rodovia Washington Luiz KM 235, s/nº, Departamento de Estatística, Jardim Guanabara, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP, CEP: 13565-905
E-mail: alaze_p7sd8sin5@yahoo.com.br

RESUMO
Este trabalho busca refletir sobre a Distribuição Gumbel. Sintetiza o lapso espaço-temporal do seu advento, as suas utilidades, características, relações com outras distribuições e estimadores. Para tanto, realiza-se uma revisão bibliográfica de autores clássicos de Inferência Estatística e de documentos disponibilizados nos sites de Departamentos de Ciências Exatas de algumas universidades brasileiras. Discute-se que tal distribuição é adequada para a modelagem do comportamento de terremotos, inundações e outros desastres naturais, bem como de investimentos financeiros e na hidrologia em geral. Portanto, ela é bastante importante nas pesquisas científicas sobre tais fenômenos.

Palavras-chave: Gumbel, Distribuição Gumbel, Distribuição do Valor Extremo.

1 INTRODUÇÃO

Emil Julius Gumbel nasceu em 18 de julho de 1891, em Munique, na Alemanha, e faleceu em 10 de setembro de 1966, aos 75 anos, em Nova York. Foi matemático e escritor pacifista alemão nascido em Munique, socialista e opositor do regime nazista e um dos históricos líderes pacifistas germânicos, que como matemático foi um dos criadores da *teoria do valor extremo*. Descendente de uma tradicional família de judeus de Wurttemberg, era a primeira das três crianças do casal de prósperos comerciantes em Munique, Hermann e Flora Gumbel, foi educado em sua cidade natal. No Kaiser-Wilhelm-Gymnasium recebeu educação humanística, licenciou-se em estatística na Universidade do Munique (1913), onde também recebeu o Ph.D (1914), pouco antes do início da Primeira Guerra Mundial. Morou em Berlim (1916-1932), onde se destacou no meio intelectual como escritor e pacifista. Tornou-se Professor da Estatística-Matemática na Universidade de Heidelberg, inicialmente (1923) como um *Privatdozent* externo e depois como *Außerordentlicher Professor* (1924) (UFCG, 2017; USP, 2017; PA, 2017; CPRM, 2017; FRANCO *et all*, 2014; MOOD; GRAYBILL; BOES, 1974; MORETTIN; BUSSAB, 2010; TOMAZ, 2008; WATANABE, 2013).

Depois do assassinato de um amigo ele investigou vários assassinatos políticos e publicou as suas descobertas em *Vier Jahre politischer Mord* (1922) e *Die Denkschrift des Reichsjustizministers über 'Vier Jahre politischer Mord'* (1924). Casou-se (1930) com uma divorciada alemã, Marie Luise Czettritz, filha de um general. Foi um dos 33 signatários do manifesto político *Dringender Appell* (1932) e, então, teve sua licença para ensinar revogada pela direção da universidade, ultraconservadora e dominada pela juventude nazista. Com a subida definitiva dos nazistas ao poder (1933), exilou-se na França, onde foi contratado pela Universidade de Lion (1934). Com Leonard Tippett e Ronald Fisher formulou o campo matemático da *teoria do valor extremo* e criou o que ele chamou de *distribuição de Gumbel* (1935) (UFCG, 2017; USP, 2017; PA, 2017; CPRM, 2017; FRANCO *et all*, 2014; MOOD; GRAYBILL; BOES, 1974; MORETTIN; BUSSAB, 2010; TOMAZ, 2008; WATANABE, 2013).

A teoria de valor extrema é um ramo da estatística que trata com os desvios extremos do número médio de distribuições de probabilidade. A teoria geral pretende avaliar o tipo de distribuições de probabilidade geradas por processos. A teoria de valor extrema é importante para avaliar o risco de eventos altamente excepcionais, como inundações de 100 anos, de grande valor nos estudos hidrológicos. Naturalizado francês (1939) e morando em Marseille, com a invasão tedesca daquele país, fugiu para Portugal e emigrou para os Estados Unidos (1940) onde se naturalizou (1945) e se destacou como professor adjunto na universidade de Colômbia (1953-1966). Publicou muitos artigos sobre o assunto, tais como *Les valeurs extrêmes des distribuições statistiques* (1935), *Statistik of Extremes* (1958), *Distributions del valeurs extremes en plusieurs dimensions* (1960), *Bivariate Logistic Distributions* (1961) e *Some Analytical Properties of Bivariate Extreme Distributions* (1967), este com C. K. Mustafi, e morreu em Nova York, aos 75 anos. Também publicou obras sobre política como *Verschwörer. Zur Geschichte und Soziologie der deutschen nationalistischen Geheimbünde 1918 - 1924* (1924) (UFCG, 2017; USP, 2017; PA, 2017; CPRM, 2017; FRANCO *et all*, 2014; MOOD; GRAYBILL; BOES, 1974; MORETTIN; BUSSAB, 2010; TOMAZ, 2008; WATANABE, 2013).

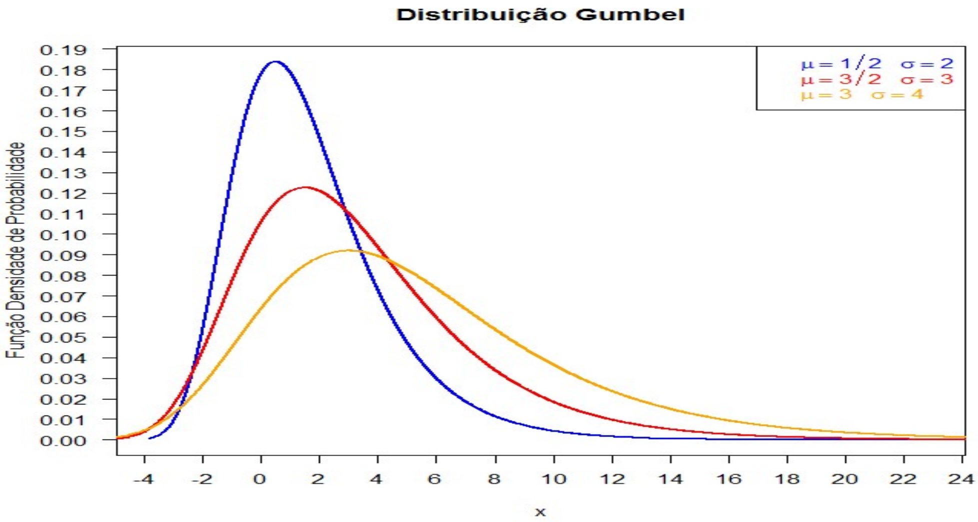
Quando ele morreu, os papéis de Gumbel fizeram parte da *Coleção Emil J. Gumbel, Documentos Políticos de um Estudioso Anti-Nazista em Weimar e Exílio* . Esses documentos incluem bobinas de microfilme que documentam suas atividades contra os nazistas (UFCG, 2017; USP, 2017; PA, 2017; CPRM, 2017; FRANCO *et all*, 2014; MOOD; GRAYBILL; BOES, 1974; MORETTIN; BUSSAB, 2010; TOMAZ, 2008; WATANABE, 2013).

2 CARACTERIZAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO GUMBEL

A distribuição de Gumbel é o Tipo I da família de distribuições do valor extremo, que é aquela que contém distribuições limite para valores extremos em uma amostra aleatória, quando o tamanho da amostra cresce (UFCG, 2017; USP, 2017; PA, 2017; CPRM, 2017; FRANCO *et all*, 2014; MOOD; GRAYBILL; BOES, 1974; MORETTIN; BUSSAB, 2010; TOMAZ, 2008; WATANABE, 2013). Uma variável Y tem distribuição Gumbel se tiver função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp\left[\frac{x-\mu}{\sigma} - \exp\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right] \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

em que $\sigma = 1/\delta$ e $\mu = \log(\alpha)$.



3 SÍNTESE DOS ELEMENTOS E DAS FORMAS ASSUMIDAS PELA DISTRIBUIÇÃO GUMBEL

Elementos	Forma padrão	Forma em y
Variável aleatória	z, com valor v = x - μ ∈ ℝ σ	y, com valor x ∈ ℝ
Parâmetros	μ = 0, σ = 1	μ ∈ ℝ, parâmetro de localização (moda), σ > 0, parâmetro de dispersão
Amplitude	v ∈ ℝ	x ∈ ℝ
Notação	z ~ Extremo(0,1)	y ~ Extremo(μ,σ)
Função densidade de probabilidade	Máximo: fz(v) = exp(-v-e-v) Mínimo: fz(v) = exp(v-exp(v))	Máximo: fy(x) = 1σexp(-x-μσ-exp(-x-μσ)) Mínimo: fy(x) = 1σexp(x-μσ-exp(x-μσ))
Função distribuição acumulada	Máximo: fz(v) = exp(-exp(-v)) Mínimo: fz(v) = 1-exp(-exp(v))	Máximo: fy(x) = exp(-exp(-x-μσ)) Mínimo: fy(x) = 1-exp(-exp(x-μσ))
Função quantil	Máximo:	Máximo:

	$gz(p) = -\ln(-\ln(p))$ $p \in (0,1)$ Mínimo: $gz(p) = \ln(-\ln(1-p))$	$gy(p) = \mu - \sigma\ln(-\ln(p))$ Mínimo: $gy(p) = \mu + \sigma\ln(-\ln(1-p))$
Média	Máximo: $E(z) \approx 0.5772$ (constante Euler-Mascheroni) Mínimo: $E(z) \approx -0.5772$	Máximo: $E(y) \approx \mu + 0.5772\sigma$ Mínimo: $E(y) \approx \mu - 0.5772\sigma$
Variância	$v(z) = \pi 26$	$v(y) = \sigma 2\pi 26$
Mediana	$\Xi z = -\ln(\ln(2)) \approx 0.3665$	$\Xi y = \mu - \sigma\ln(\ln(2))$
Moda	0	μ
Coeficiente de assimetria	$\mu 1 \approx 1.14$	$\mu 1 \approx 1.14$
Coeficiente de curtose	$\mu 2 = 125$	$\mu 2 = 125$
Função geradora de momentos	Máximo: $mz(t) = \mu(1-t),\ t < 1$ μ é a Função Gama Mínimo: $mz(t) = \mu(1+t),\ t > -1$	Máximo: $my(t) = \exp(\mu t)\mu(1-\sigma t)$, $t < 1\sigma$ Mínimo: $my(t) = \exp(\mu t)\mu(1+\sigma t)$, $t > -1\sigma$
Função característica	Máximo: $\emptyset z(t) = \mu(1-it)$ Mínimo: $\emptyset z(t) = \mu(1+it)$	Máximo: $\emptyset y(t)=\mu(1-i\sigma t)\exp(i\mu t)$ Mínimo: $\emptyset y(t) = \mu(1+i\sigma t)\exp(i\mu t)$

4 RELAÇÕES DA DISTRIBUIÇÃO GUMBEL COM OUTRAS DISTRIBUIÇÕES

1 Se $u \sim U\ (0,1)$ (distribuição uniforme padrão), então $y = \mu - \sigma\ln(-\ln(u))$ e $y = \mu + \sigma\ln(-\ln(1-u))$ tem, respectivamente, distribuição do valor extremo para máximo e para mínimo, com parâmetro de localização μ e dispersão σ;

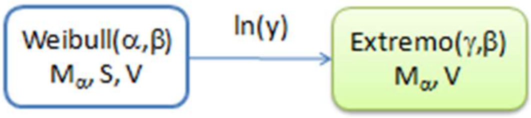
2 Se $x \sim$ Expo (1) (distruição exponencial padrão), então $y = -\ln(x)$ tem distribuição do valor extremo padrão para o máximo e $y = \ln(x)$ tem distribuição do valor extremo padrão para o mínimo;

3 Se y tem distribuição do valor extremo para o mínimo, então $x=ey$ tem distribuição exponencial padrão;

4 De modo mais geral:

- se $x \sim$Weibull (α,λ) (distribuição Weibull) com parâmetro de formato α e de dispersão λ, então $y = \ln(x)$ tem distribuição do valor extremo para o mínimo com parâmetro de localização $\mu = \ln(\alpha)$ e dispersão $\sigma = 1\lambda$; e,
- se y tem distribuição do valor extremo para mínimo com localização μ e dispersão σ então $x = ey$ tem distribuição Weibull com parâmetro de formato 1σ e parâmetro de dispersão $e\sigma$.

A figura que segue ilustra as relações com as demais distribruições (UFCG, 2017; USP, 2017; PA, 2017; CPRM, 2017; FRANCO *et all*, 2014; MOOD; GRAYBILL; BOES, 1974; MORETTIN; BUSSAB, 2010; TOMAZ, 2008; WATANABE, 2013; GIL, 2010; MARCONI; LAKATOS, 2008).



A distribuição Gumbel é o mínimo das distribuições Normal e Log-normal, e o máximo das distribuições Exponencial, Gamma, Normal e Log-normal (UFCG, 2017; USP, 2017; PA, 2017; CPRM, 2017; FRANCO *et all*, 2014; MOOD; GRAYBILL; BOES, 1974; MORETTIN; BUSSAB, 2010; TOMAZ, 2008; WATANABE, 2013), conforme apresentado na tabela a seguir:

Distribuição Inicial	**Distribuição Limitante para Extremos**	
	Máximo	**Mínimo**
Exponencial	Gumbel	Weibull
Gamma	Gumbel	Weibull
Normal	Gumbel	Gumbel
Log-normal	Gumbel	Gumbel
Uniforme	Weibull	Weibull
Pareto	Fréchet	Weibull
Cauchy	Fréchet	Fréchet

5 ESTIMADORES DA DISTRIBUIÇÃO GUMBEL (MÁXIMOS)

Método MOM:

$$\overline{\alpha} = 0{,}7797\, s_x \quad \beta = \overline{x} - 0{,}45\, s_x$$

Método MVS:

α e β são as soluções do seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln[L(\alpha,\beta)] = -\frac{N}{\alpha^{1}} + \frac{1}{\alpha^{2}}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \beta) - \frac{1}{\alpha^{2}}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \beta)\exp\left(\frac{-x_i - beta}{\alpha^{1}}\right) = 0(F)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\ln[L(\alpha,\beta)]=\frac{N}{\alpha^{1}}-\frac{1}{\alpha^{1}}\sum_{i=1}^{N}\exp\left(\frac{-x_i-beta}{\alpha^{1}}\right)=0\,(G)$$

Manipulando-se ambas equações, chega-se a:

$$F(\alpha)=\sum_{i=1}^{N}x_i\exp\left(-\frac{x_i}{\alpha^{1}}\right)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\alpha)\sum_{i=1}^{N}\exp\left(-\frac{x_i}{\alpha^{1}}\right)(H)$$

A solução de (H), pelo método de Newton, fornece α .

Em seguida, $\overline{\beta}=\alpha * \ln\left[\frac{N}{\sum_{i=1}^{N}\exp\left(-\frac{x_i}{\alpha^{1}}\right)}\right]$

Método MML:

$$\overline{\alpha}=\frac{l_2}{\ln 2}\quad \beta=l_1-0{,}5772\,\overline{\alpha}$$

6 ESTIMADORES DA DISTRIBUIÇÃO GUMBEL (MÍNIMOS)

Método MOM:

$$\overline{\alpha}=0{,}7797\,s_x\quad \beta=\overline{x}-0{,}45\,s_x$$

Método MML:

$$\overline{\alpha}=\frac{l_2}{\ln 2}\quad \beta=l_1-0{,}5772\,\overline{\alpha}$$

7 CONCLUSÕES

A Distribuição Gumbel é o modelo probabilístico utilizado para modelar a distribuição do máximo. Aparece como o limite do máximo para uma amostra aleatória de uma população estatística com modelo exponencial padrão.

Pela sua natureza, é importante na hidrologia (para modelar vazões de rios - máximos mensais ou anuais, por exemplo), nas finanças, na modelagem do comportamento de terremotos e de outros desastres naturais. Além disto, a distribuição de probabilidades do Valor Extremo Generalizado (GEV), utilizando o método dos ML para a estimativa dos parâmetros e a distribuição Gumbel pelo método MV, são consideradas, na literatura crítica do tema, as mais adequadas para estudos de probabilidade de precipitação máxima diária anual.

Devido à escasses de artigos que tratem especificamente das especificidades da Distribuição Gumbel, este trabalho se mostra bastante contribuidor para a sua análise e para os estudos que façam o seu uso.

REFERÊNCIAS

CPRM. COMPANHIA DE PESQUISA DE RECURSOS MINERAIS. Capítulo 6: Estimação de Parâmetros. Brasília-DF: CPRM, 2017. Disponível em <http://www.cprm. gov.br/publique/media/cap6-est_para.pdf>. Acessado em 11 de fevereiro de 2017.

FRANCO, Camila S. *et all*.. Distribuição de probabilidades para precipitação máxima diária na Bacia Hidrográfica do Rio Verde, Minas Gerais. Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental, vol. 18, n. 7, p. 735-741, 2014. 7 p. Disponível em <http://www.scielo. br/pdf/rbeaa/v18n7/v18n07a10.pdf>. Acessado em 11 de fevereiro de 2017.

GIL, Antônio Carlos. Como elaborar projetos de pesquisa. 5ª ed.. São Paulo: Atlas, 2010. 184 p.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. Técnicas de pesquisa: planejamento e execução de pesquisas, amostragens e técnicas de pesquisa, elaboração, análise e interpretação de dados. São Paulo: Atlas, 2008. 277 p.

MOOD, Alexander McFarlane; GRAYBILL, Franklin A.; BOES, Duane C.. Introduction to the theory of statistics. Nova Iorque-EUA: McGraw Hill, 1974. 577 p.

MORETTIN, Pedro A.; BUSSAB, Wilton de O.. Estatística Básica. 6a edição. Revista e atualizada. São Paulo: Saraiva, 2010. 557 p.

PA. PORTAL ACTION. Distribuição Gumbel (ou valor extremo). Disponível em <http://www.portalaction.com.br/probabilidades/614-distribuicao-gumbel-ou-valor-extremo>. Acessado em 11 de fevereiro de 2017.

TOMAZ, Plínio. Capítulo 151: Distribuição de Gumbel e Log-Pearson Tipo III. Karnataka-Índia: Kukke Subramanya Temple, 2008. Disponível em <http://www.pliniotomaz. com.br/downloads/Novos_livros/livro_calculoshidrolicos/capitulo151.pdf>. Acessado em 11 de fevereiro de 2017.

UFCG. UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE. Emil Julius Gumbel. Disponível em <http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/EmlJGumb.html>. Acessado em 11 de fevereiro de 2017.

USP. UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Distribuição do valor extremo. Disponível em <http://www.galileu.esalq.usp.br/mostra_topico.php?cod=992>. Acessado em 11 de fevereiro de 2017.

WATANABE, Frederico Mamoru. Análise do Método de Gumbel para cálculo de vazões de dimensionamento de vertedouros. São Carlos-SP: EESC-USP, 2013. 89 p.